

U. Didáctica 10: Cuerpos geométricos

RECUERDA

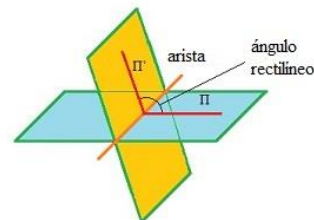
Cuando dos planos se cortan, su intersección es una recta y determinan cuatro regiones en el espacio.

- Un **ángulo diedro** es la región que queda determinada por dos semiplanos que comparten una recta

Los elementos de un diedro son:

- **Caras:** Los semiplanos que lo forman
- **Arista:** la recta común a los dos planos.

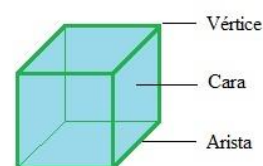
La medida de un ángulo diedro es la misma que la de cualquier ángulo formado por dos semirrectas contenidas en las caras y perpendiculares a la arista.



- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos.

Los elementos de un poliedro son:

- **Caras:** Cada polígono que limita al poliedro
- **Aristas:** Segmentos resultantes de la intersección de dos caras.
- **Vértices:** Puntos resultantes de la intersección de tres o más aristas

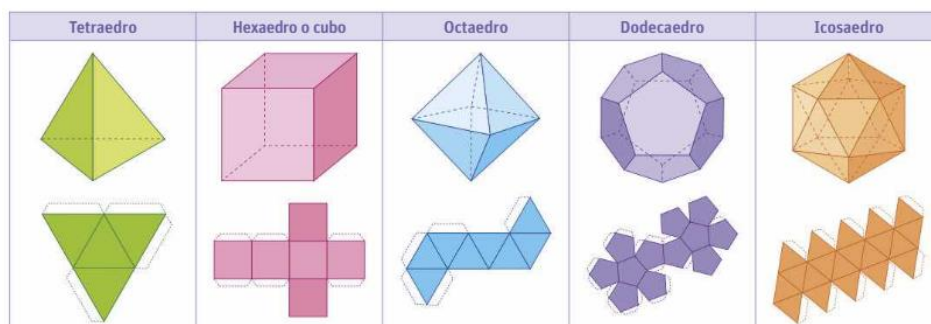


- Un **poliedro es convexo** cuando todos sus ángulos diedros son menores de 180° . Si tienen algún ángulo diedro mayor de 180° , es **cóncavo**. Los poliedros convexos se pueden apoyar en el plano sobre todas sus caras

- Teorema de Euler:** En cualquier poliedro convexo se verifica que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos:

$$C + V = A + 2$$

- Un **poliedro es regular** o **platónico** cuando es convexo, todas sus caras son polígonos regulares iguales y en todos sus vértices concurren el mismo número de aristas o de caras. Solo existen cinco poliedros regulares.



- Un **poliedro es semirregular** o **arquimediano** cuando sus caras son polígonos regulares, aunque no todas iguales, y en todos sus vértices concurren los mismos polígonos en el mismo orden. Se pueden obtener poliedros semirregulares **truncando** poliedros regulares.

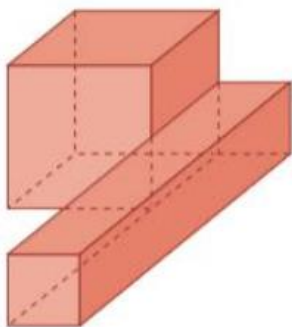
Ejercicios

- Completa la siguiente tabla en la que aparece el número de caras, vértices y aristas de varios poliedros convexos

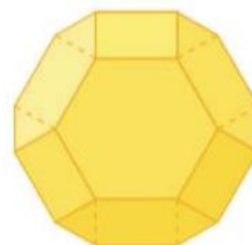
	Caras	Aristas	Vértices
Poliedro 1	8	12	
Poliedro 2		30	20
Poliedro 3	4		4

2. Comprueba que los poliedros regulares verifican el teorema de Euler

3. Cuenta el número de caras, vértices y de aristas del poliedro. ¿Verifica el teorema de Euler?



4. Si se considera un octaedro y los puntos que dividen sus lados en tres partes iguales, se corta mediante planos determinados por estos puntos y se prescinde de las esquinas formadas, se obtiene el poliedro denominado octaedro truncado.



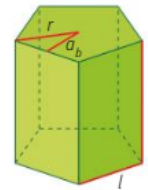
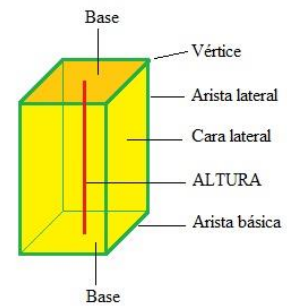
- a) ¿Qué polígonos forman sus caras?
- b) ¿Por qué se trata de un poliedro semirregular?
- c) ¿Se trata de un poliedro cóncavo o convexo?
- d) Comprueba que verifica el teorema de Euler.

PRISMAS

- Un **prisma** es un poliedro con dos caras iguales paralelas llamadas bases, y el resto de las caras laterales son paralelogramos. Los prismas se nombran según el número de lados del polígono de las bases: triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.

Pueden ser:

- *Rectos*: sus caras laterales son rectángulos (También: sus caras laterales son perpendiculares a las bases)
- *Oblicuos*: no todas sus caras son rectángulos
- *Regulares*: los que son rectos y sus bases son polígonos regulares.
- *Paralelepípedo*: prisma cuyas bases son paralelogramos. Si las seis caras son rectángulos se denomina **ortopedro**.



- Los elementos de un prisma regular son:
 - Altura: h
 - Lado de la base: l
 - Apotema de la base: a_b
 - Radio de la base: r
- Para calcular las áreas lateral y total de un prisma se considera su desarrollo plano.
 - El **área lateral de un prisma recto** es la suma de las áreas de los rectángulos que forman sus caras laterales y coincide con la del rectángulo de su desarrollo plano:

$$A_{lateral} = \text{Perímetro de la base} \cdot h$$

- El **área total de un prisma regular** es la suma del área lateral más dos veces el área de la base:

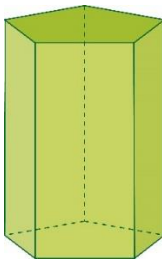
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

- El **volumen de un prisma regular** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura del prisma:

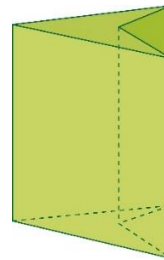
$$V = A_{base} \cdot h$$

5. Justifica si los siguientes prismas son cóncavos o convexos.

a)



b)

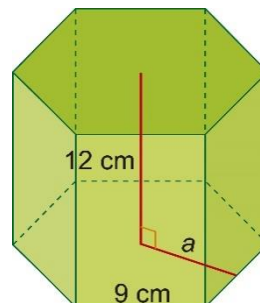


6. Calcula el área total y el volumen de un cubo de arista 6 cm.

7. Se quieren pintar las paredes y el suelo de una piscina con forma de ortoedro, de 25 metros de larga, 15 metros de ancha y 2 metros de profundidad.
- a) Si el pintor cobra 5€ por cada metro cuadrado pintado, ¿cuánto costará pintarla?

b) ¿Cuántos litros de agua habrá en la piscina cuando esté llena?

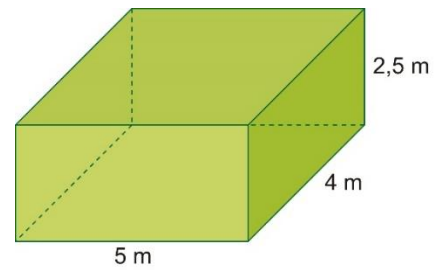
8. Calcula el área total y el volumen del prisma de la figura sabiendo que la altura es $h = 12$ cm, y que el lado de la base mide 9 cm.



9. ¿Cuál será la altura de un prisma cuya base tiene un área de 600 cm^2 y su volumen es 1800 cm^3 ?

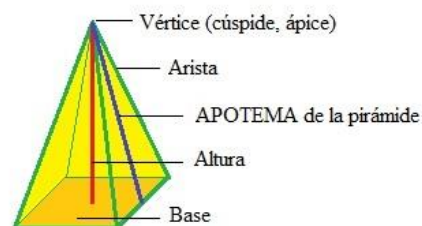
10. La habitación de Laia tiene forma un ortoedro como el de la figura.

- a) Calcula el volumen de la habitación.
- b) ¿Cuánto costará pintar el techo con una pintura cuyo precio es de 10€ por metro cuadrado?
- c) Si se quieren poner baldosas cuadradas de 10 dm de lado en el suelo de esta habitación, ¿cuántas harán falta?
- d) Si el aire está compuesto por un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de otras sustancias, ¿cuántos litros de oxígeno hay en la habitación de Laia? ¿Y cuántos de nitrógeno?



PIRÁMIDES

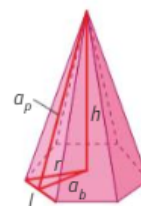
- Una **pirámide** es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en el vértice de la pirámide. Las pirámides se nombran según el número de lados del polígono de la base: triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.



- Una pirámide pueden ser
 - Recta**: es aquella cuyas caras laterales son triángulos isósceles (También: La altura de la pirámide va al centro de la base).
 - Oblicua**: la que no es recta.
 - Regular**: es aquella que es recta y su base es un polígono regular.

- Los elementos de una pirámide regular son:

- Altura: h
- Lado de la base: l
- Apotema de la base: a_b
- Radio de la base: r
- Apotema de la pirámide: a_p



Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base y se prescinde de la parte superior, se obtiene un tronco de pirámide.

- Para calcular las áreas lateral y total de una pirámide se considera su desarrollo plano.
 - El **área lateral de una pirámide regular** es la suma de las áreas de todos los triángulos isósceles que forman las caras:

$$A_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot \text{Perímetro de la base} \cdot a_p$$

- El **área total de una pirámide regular** es la suma del área lateral más el área de la base:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

- El **volumen de una pirámide regular** es un tercio del área de la base por la altura de la pirámide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

11. Dibuja las siguientes pirámides, sus desarrollos y calcula el número de caras, aristas y vértices que tienen.

a) Pirámide recta de base cuadrada

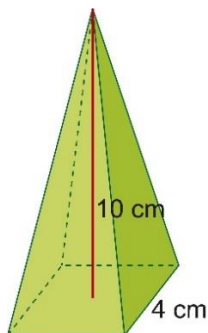
b) Pirámide recta de base hexagonal

12. Dibuja una pirámide regular y otra irregular. Explica las diferencias entre ellas.

13. Indica si son verdaderas las siguientes afirmaciones, y corrige cuando sean falsas.

- a) En una pirámide recta, las caras laterales son triángulos isósceles.
- b) Una pirámide es cóncava si su base es un polígono convexo.
- c) Un tronco de pirámide tiene dos bases cuyos polígonos son semejantes.
- d) Las caras laterales de un tronco de pirámide son rectángulos.

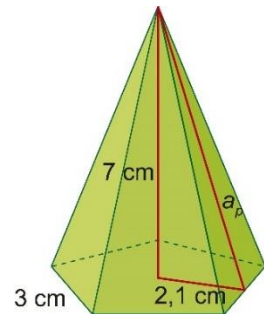
14. Calcula el área total y el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular sabiendo que su altura tiene por medida $h = 10$ cm, y que el lado de la base mide 4 cm.



15. ¿Cuál será la altura de una pirámide cuya base tiene un área de 60 cm^2 y su volumen es 150 cm^3 ?

16. Halla el volumen (en metros cúbicos) de la pirámide de Keops sabiendo que su base es un cuadrado de 230 m de lado, y su altura es el 70 % del lado de su base.

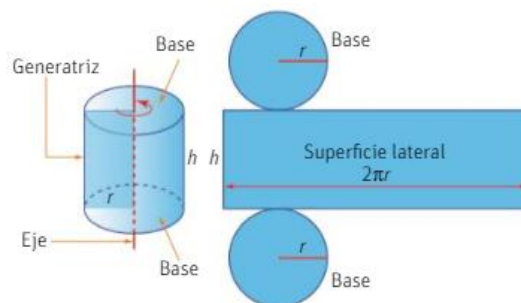
17. Calcula el área total y el volumen de la siguiente pirámide



CUERPOS DE REVOLUCIÓN

- Un **cuerpo redondo** o **cuerpo de revolución** es el volumen que se obtiene al hacer girar una figura plana alrededor de uno de sus lados situado en una recta llamada **eje de rotación**. Por lo tanto, sólo tienen una cara lateral, que es curva. La **generatriz** es la línea de la figura plana que genera el cuerpo redondo.

- Un **cilindro recto** es el cuerpo redondo que se genera al hacer girar un rectángulo en torno a uno de sus lados. El lado sobre el que gira el rectángulo es el eje y el lado opuesto, que genera el cilindro, se llama generatriz.



- Los cilindros rectos están formados por dos bases circulares paralelas y una superficie lateral. Sus elementos son:

- Altura: h
- Radio de la base: r
- Generatriz

Un **cilindro oblicuo** es el resultado de cortar un cilindro recto por dos planos paralelos entre si y que no sean perpendiculares ni paralelos al eje del cilindro recto.

- Para calcular las áreas lateral y total de un cilindro se considera su desarrollo plano.
 - El **área lateral de un cilindro recto** es el del rectángulo que forma su superficie lateral:

$$A_{lateral} = 2\pi r h$$

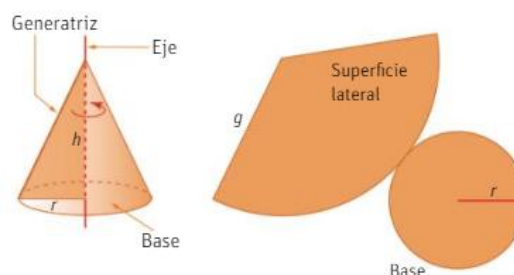
- El **área total de un cilindro recto** es la suma del área lateral más dos veces el área de la base:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

- El **volumen de un cilindro recto** es el producto del área de la base por la altura del cilindro:

$$V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

- Un **cono recto** es el cuerpo redondo que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. La hipotenusa es el lado del triángulo que genera el cono y se llama **generatriz**, y el cateto sobre el que gira es el **eje**.

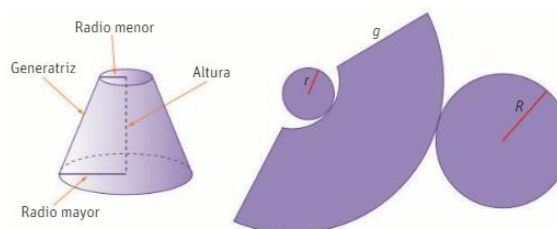


- Los conos rectos están formados por una base circular y una superficie lateral. Sus elementos son:

- Altura: h
- Radio de la base: r
- Generatriz: g

Un **cono oblicuo** es el resultado de cortar un cono recto por un plano que no sea perpendicular ni paralelo al eje del cono recto.

Si se corta un cono recto por un plano paralelo a la base y se prescinde de la parte superior se obtiene un tronco de cono



- Para calcular las áreas lateral y total de un cono se considera su desarrollo plano.

- El **área lateral de un cono recto** es: $A_{lateral} = \pi r g$

- El **área total de un cilindro recto** es la suma del área lateral más el área de la base:

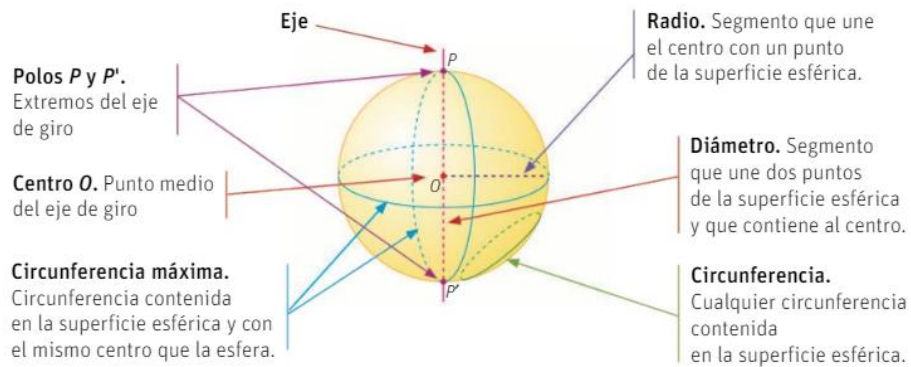
$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g + \pi r^2$$

- El **volumen de un cilindro recto** es un tercio del área de la base por la altura del cono:

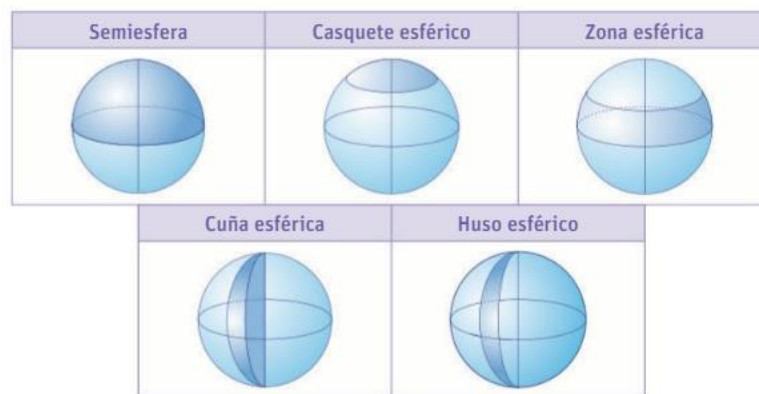
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

- Una **esfera** es un cuerpo redondo que se genera al hacer girar un semicírculo sobre su diámetro. La superficie que lo delimita se llama **superficie esférica**.

- Los elementos de la esfera son:



- Partes de una esfera:



- El **área de una superficie esférica** es: $A = 4\pi r^2$
- El **volumen de una esfera** es: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

18. Los radios de la Tierra y de la Luna son, aproximadamente, 6370 km y 1737 km respectivamente.

- ¿Cuántas veces es mayor el radio de la Tierra que el de la Luna?
- Calcula el área de cada uno de los cuerpos (expresa el resultado en notación científica con dos cifras significativas). ¿Cuántas veces mayor es el área de la Tierra que el de la Luna?
- Calcula el volumen de cada uno de los cuerpos (expresa el resultado en notación científica con dos cifras significativas). ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la Tierra que el de la Luna?

19. Un cono tiene 4 centímetros de altura y el radio de su base mide de 10 centímetros.

a) ¿Cuánto mide su generatriz?

b) Dibuja su desarrollo.

c) Calcula su área total y su volumen.

20. Indica si son verdaderas las siguientes afirmaciones, y corrige cuando sean falsas.

a) Si una esfera y un cilindro tienen el mismo radio, entonces tienen el mismo volumen.

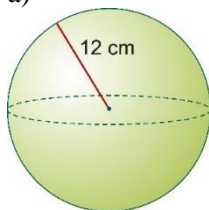
b) Si un cilindro y un cono tienen el mismo radio de la base, entonces tienen el mismo área.

c) La base de un cono es siempre un círculo.

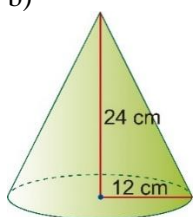
d) Si se corta un cono con un plano perpendicular a la base se obtiene un tronco de cono.

21. Calcula el área total y el volumen de los siguientes cuerpos redondos.

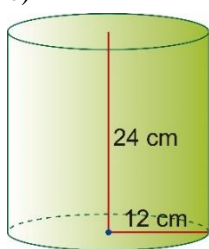
a)



b)



c)



22. La cúpula de una iglesia tiene forma de semiesfera de 40 metros de diámetro. Los materiales necesarios para restaurarla tienen un coste de 350 € por metro cuadrado. ¿Cuánto costará la restauración?

23. Un cono de 6 centímetros de altura y una esfera de 6 centímetros de radio tienen el mismo volumen. ¿Cuál es el radio de la base del cono?

24. Calcula el área total y el volumen de la siguiente figura:

